

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini diuraikan beberapa definisi dan teorema yang digunakan dalam pembahasan masalah dalam bab selanjutnya. Adapun definisi dan teorema-teorema yang digunakan diambil dari buku-buku yang berkaitan tentang masalah yang dibahas.

2.1 Himpunan

2.1.1 Pengertian Himpunan

Definisi 2.1 (Silaban, 1995)

Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek yang menyusun himpunan disebut sebagai anggota atau elemen atau unsur dari himpunan.

Himpunan dinotasikan dengan huruf besar seperti A, B, C dan lain-lain. Sedangkan anggota himpunan dengan huruf kecil, misal a, b, c dan lain-lain. Pernyataan “ a adalah anggota dari himpunan A ” ditulis $a \in A$, sedangkan pernyataan “ b bukan anggota himpunan A ” ditulis $b \notin A$.

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dimuat. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan kosong juga merupakan suatu himpunan hingga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh bilangan himpunan tak hingga. (Arifin, 2000)

Definisi 2.2 (Wibisono, 2008)

Jumlah anggota di dalam A disebut kardinal dari himpunan A .

Kardinalitas himpunan A dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh 2.1

A = Himpunan bilangan ganjil antara 2 dan 10

$A = \{3, 5, 7, 9\}$, maka $n(A) = |A| = 4$.

2.2 Relasi

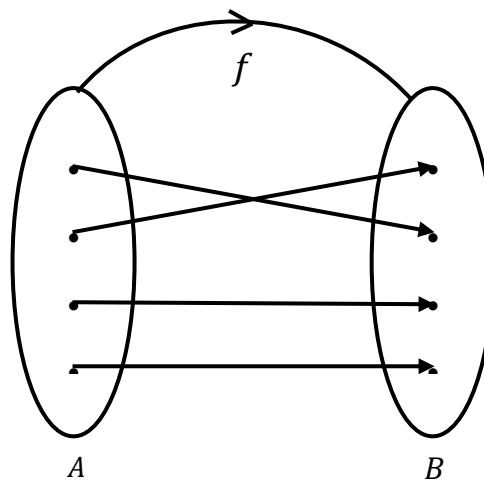
Relasi adalah hubungan antara anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lainnya. Relasi dari himpunan A ke himpunan B ialah aturan yang menghubungkan anggota-anggota himpunan A pada anggota-anggota himpunan B . Relasi irefleksif adalah relasi dimana setiap anggota A tidak berhubungan dengan dirinya sendiri. Relasi anti simetrik adalah relasi dimana setiap a dan b yang terhubung hanya terhubung salah satunya saja (dengan asumsi a dan b berlainan).

2.3 Fungsi

2.3.1 Definisi Fungsi

Definisi 2.3 (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2010)

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap objek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (*domain*), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (*codomain*). Himpunan yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (*range*) fungsi.



Gambar 2.1. Fungsi f .

Apabila f menyatakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B maka dapat ditulis sebagai $f : A \rightarrow B$. Jika suatu elemen $x \in A$ dipasangkan kepada elemen $y \in B$ oleh suatu fungsi f maka dapat dinyatakan bahwa $y = f(x)$.

Definisi 2.4 (Bartle & Sherbet, 2008)

Misalkan f adalah fungsi dari A ke B . Fungsi f disebut satu-satu jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah satu-satu jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi satu-satu sering juga disebut dengan fungsi injektif.

Definisi 2.5 (Bartle & Sherbet, 2008)

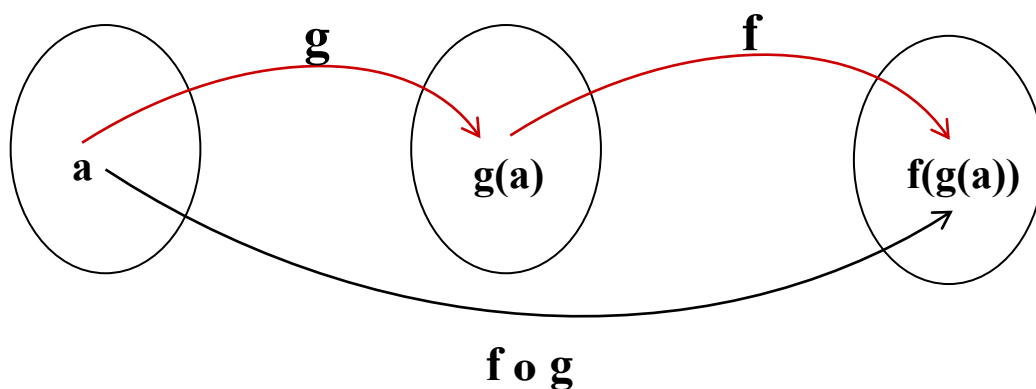
Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B . Fungsi f disebut fungsi pada jika $R(f) = B$. Jadi, $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi pada jika untuk setiap $y \in B$ maka ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi pada sering disebut juga fungsi surjektif.

Definisi 2.6 (Bartle & Sherbet, 2008)

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif.

2.3.2 Fungsi Komposisi

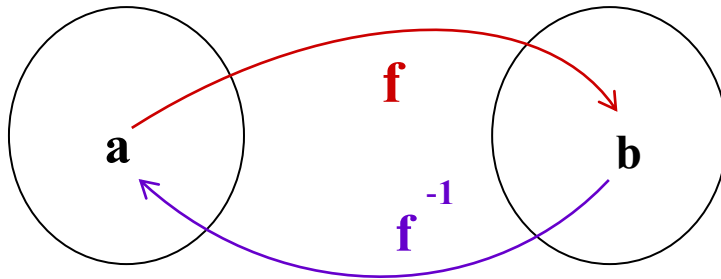
Karena fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, dapat dilakukan komposisi dari dua buah fungsi. Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B , dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C . Komposisi f dan g , dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(a) = f(g(a))$. Dengan kata lain, $f \circ g$ adalah fungsi yang memetakan nilai dari $g(a)$ ke $f(a)$. (Munir, 2010).



Gambar 2.2. Fungsi komposisi.

2.3.3 Fungsi Invers

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-satu dari A ke B , maka dapat ditemukan balikan atau invers dari f . Fungsi invers dari f dilambangkan dengan f^{-1} . Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B , maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. (Munir, 2010)



Gambar 2.3. Fungsi invers.

2.4 Permutasi

Definisi 2.7 (Fraleigh, 2000)

Permutasi pada himpunan A adalah pemetaan $\varphi: A \rightarrow A$ yang bersifat satu-satu dan pada.

Contoh 2.2

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$. Suatu permutasi $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$ berarti memetakan a ke c , b ke d , c ke b , d ke a . Dapat juga ditulis dalam bentuk $\pi_1(a) = c, \pi_1(b) = d, \pi_1(c) = b, \pi_1(d) = a$.

Dalam mengkomposisikan dua permutasi selalu mengikuti ketentuan yang digunakan di dalam mengkomposisikan dua pemetaan biasa, yaitu dengan membaca dari kanan ke kiri.

Misalkan $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$ dan $\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$. Komposisi kedua permutasi tersebut adalah

$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$ atau dapat dituliskan sebagai

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(a) = \pi_1(\pi_2(a)) = \pi_1(b) = d,$$

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(b) = \pi_1(\pi_2(b)) = \pi_1(d) = a,$$

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(c) = \pi_1(\pi_2(c)) = \pi_1(a) = c,$$

$$\text{dan } (\pi_1 \circ \pi_2)(d) = \pi_1(\pi_2(d)) = \pi_1(c) = b.$$

Invers dari suatu permutasi π_1 diperoleh dengan membaca dari bawah ke atas. Jika a terdapat di bawah d di dalam π_1 , maka d akan terdapat di bawah a di dalam π_1^{-1} . Dengan demikian, $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$.

Contoh 2.3

Untuk $n = \{1, 2, 3\}$, permutasi yang mungkin terjadi $n! = 3! = 6$ adalah sebagai berikut :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diberikan penjelasan tentang graf.

2.5 Graf

2.5.1 Definisi Umum Graf

Definisi 2.8 (Munir, 2010)

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi di atas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu.

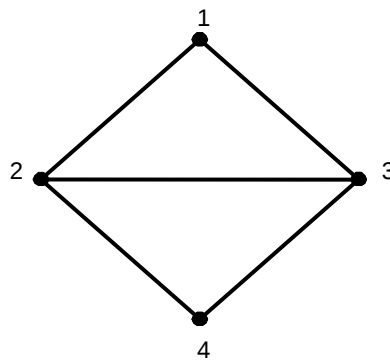
Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \dots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v , maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$.

Secara geometri, graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (simpul) di dalam bidang dwimatra yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi). Gambar G pada Gambar 2.4 merupakan graf sederhana.

Definisi 2.9 (Munir, 2010)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Simpul dan sisi yang dilalui di dalam lintasan boleh berulang. Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) jika semua simpulnya berbeda (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*).



Gambar 2.4. Graf G .

Contoh 2.4

Pada Gambar 2.4, lintasan 1,2,4,3 adalah lintasan sederhana, juga lintasan terbuka. Lintasan 1,2,4,3,1 adalah juga lintasan sederhana, juga lintasan tertutup. Lintasan 1,2,4,3,2 bukan lintasan sederhana, tetapi lintasan terbuka.

Definisi 2.10 (Budayasa, 2007)

Sebuah graf G pada graf tak-berarah dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua simpul yang berbeda di G terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Gambar 2.4 merupakan contoh graf terhubung.

Definisi 2.11 (Munir, 2010)

Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v .

Contoh 2.5

Pada Gambar 2.4, sisi (1,2) bersisian dengan simpul 1 dan simpul 2, sisi (1,3) bersisian dengan simpul 1 dan simpul 3, sisi (2,3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2,4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, dan sisi (3,4) bersisian dengan simpul 3 dan simpul 4.

Definisi 2.12 (Munir, 2010)

Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Derajat suatu simpul v dinotasikan dengan $d(v)$.

Contoh 2.6

Pada Gambar 2.4,

$$d(1) = d(4) = 2$$

$$d(2) = d(3) = 3$$

2.5.2 Graf Sederhana (*simple graph*)

Definisi 2.13 (Munir, 2010)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.

Graf G pada Gambar 2.4 adalah contoh graf sederhana yang mempresentasikan jaringan komputer. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-berurut (*unordered pairs*). Jadi, menuliskan sisi (u, v) sama saja dengan (v, u) .

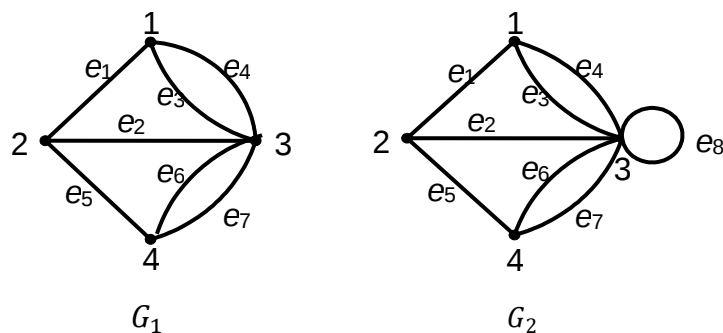
2.5.3 Graf Tak-Sederhana (*unsimple graph*)

Definisi 2.14 (Munir, 2010)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana.

Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. Gambar G_1 pada Gambar 2.5 adalah graf ganda. Sisi ganda dapat diasosiasikan sebagai pasangan tak-berurut yang sama. Pada jaringan telekomunikasi, sisi ganda G_2 dapat diandaikan sebagai saluran telepon tambahan apabila beban komunikasi data antar komputer sangat besar.

Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). Gambar G_1 pada Gambar 2.5 adalah graf semu (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Sisi gelang pada G_2 dapat dianggap sebagai saluran telepon tambahan yang menghubungkan komputer dengan dirinya sendiri.

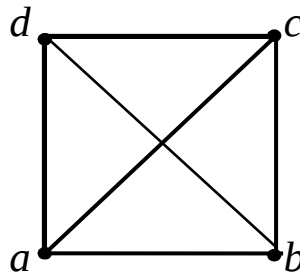


Gambar 2.5. Dua buah graf : (G_1) graf ganda dan (G_2) graf semu.

2.5.4 Graf Tak-Berarah (*undirected graph*)

Definisi 2.15 (Munir, 2010)

Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $v_j v_k = v_k v_j$ adalah sisi yang sama.



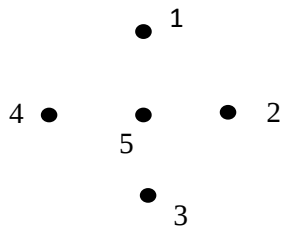
Gambar 2.6. Graf tak-berarah.

2.5.5 Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Definisi 2.16 (Munir, 2010)

Graf yang himpunannya sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n , yang dalam hal ini n adalah jumlah simpul.

Contoh 2.7

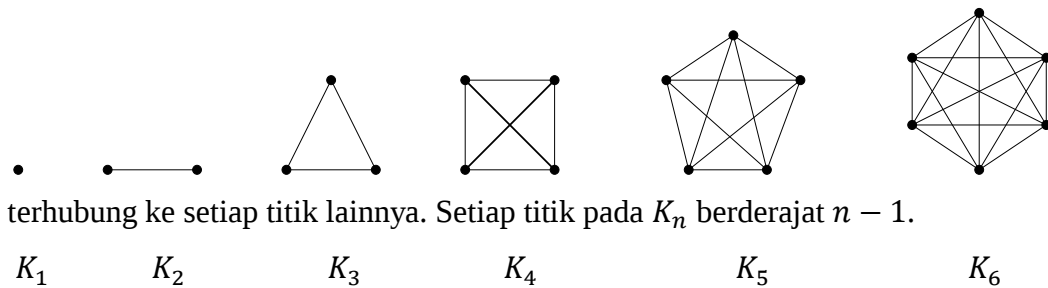


Gambar 2.7. Graf kosong N_5 .

2.5.6 Graf Lengkap (*complete graph*)

Definisi 2.17 (Wilson & Watskin, 1990)

Graf lengkap dengan n titik, dinotasikan K_n , yaitu sebuah graf yang setiap titiknya



terhubung ke setiap titik lainnya. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.

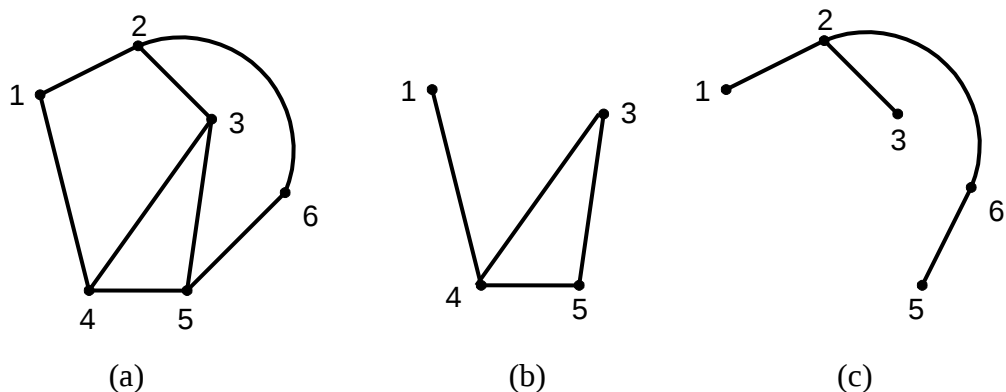
Gambar 2.8. Graf lengkap.

2.5.7 Upagraf (*subgraph*) dan Komplemen Graf

Definisi 2.18 (Munir, 2010)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$

Gambar 2.9(b) adalah upagraf dari graf pada Gambar 2.9(a).



Gambar 2.9. (a) Graf G_1 , (b) Upagraf dari graf G_1 , dan (c) komplemen dari upagraf yang bersesuaian.

Definisi 2.19 (Munir, 2010)

Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

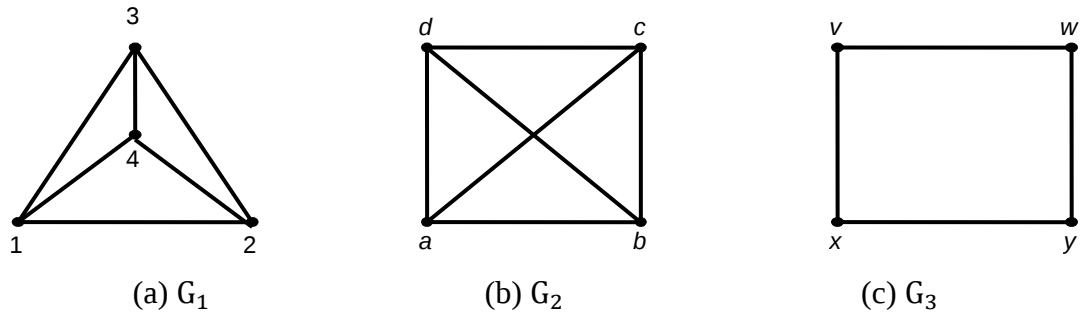
Gambar 2.9(c) adalah komplemen dari upagraf pada Gambar 2.9(b).

2.5.8 Graf Isomorfik

Definisi 2.20 (Chartrand dan Lesniak, 1986)

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu φ dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ sedemikian hingga $(u, v) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfik terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$.

Contoh 2.8



Gambar 2.10. G_1 isomorfik dengan G_2 , tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3 .

Pada Gambar 2.10, G_1 isomorfik dengan G_2 . Simpul 1, 2, 3, 4 pada G_1 dipetakan satu-satu ke simpul a, b, c, d pada G_2 sehingga

$\varphi(1) = a, \varphi(2) = b, \varphi(3) = c, \varphi(4) = d$. Akan dibuktikan bahwa $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(1), \varphi(2)), (\varphi(1), \varphi(3)), (\varphi(1), \varphi(4)), (\varphi(2), \varphi(3)), (\varphi(2), \varphi(4)), (\varphi(3), \varphi(4)) \in E(G_2)$.

Bukti :

$(1, 2) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(2)) \in E(G_2) = (a, b) \in E(G_2)$.

$(1, 3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(3)) \in E(G_2) = (a, c) \in E(G_2)$.

$(1, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(4)) \in E(G_2) = (a, d) \in E(G_2)$.

$(2, 3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(2), \varphi(3)) \in E(G_2) = (b, c) \in E(G_2)$.

$(2, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(2), \varphi(4)) \in E(G_2) = (b, d) \in E(G_2)$.

$(3, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(3), \varphi(4)) \in E(G_2) = (c, d) \in E(G_2)$.

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa G_1 isomorfik dengan G_2 .

Pada Gambar 2.10, G_1 tidak isomorfik dengan G_3 . Simpul 1, 2, 3, 4 pada G_1 dipetakan satu-satu ke simpul v, w, x, y pada G_3 sehingga

$\varphi(1) = v, \varphi(2) = w, \varphi(3) = x, \varphi(4) = y$. Akan dibuktikan bahwa $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(1), \varphi(2)), (\varphi(1), \varphi(3)), (\varphi(1), \varphi(4)), (\varphi(2), \varphi(3)), (\varphi(2), \varphi(4)), (\varphi(3), \varphi(4)) \in E(G_3)$.

Bukti :

$(1, 2) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(2)) \in E(G_3) = (v, w) \in E(G_3)$.

$(1, 3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(3)) \in E(G_3) = (v, x) \in E(G_3)$.

$(1, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(1), \varphi(4)) \notin E(G_3) = (v, y) \notin E(G_3)$.

$(2, 3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(2), \varphi(3)) \notin E(G_3) = (w, x) \notin E(G_3)$.

$(2, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(2), \varphi(4)) \in E(G_3) = (w, y) \in E(G_3)$.

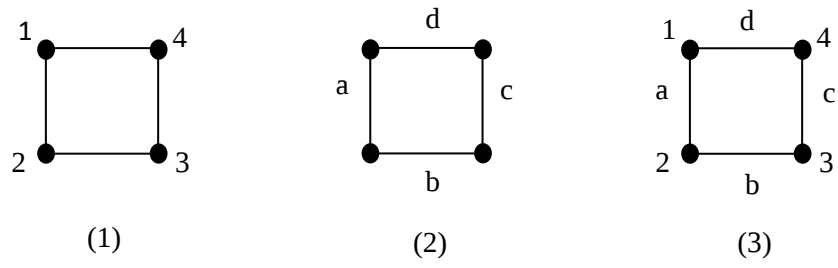
$(3, 4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(3), \varphi(4)) \in E(G_3) = (x, y) \in E(G_3)$.

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa G_1 tidak isomorfik dengan G_3 .

2.5.9 Pelabelan Graf

Definisi 2.21 (Gallian, 2010)

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (simpul atau sisi) dengan bilangan bulat positif yang disebut label. Jika domain dari pemetaan ini adalah himpunan simpul, maka pelabelan disebut pelabelan simpul (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah himpunan sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya himpunan simpul dan himpunan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).



Gambar 2.11. (1) Pelabelan simpul, (2) Pelabelan sisi dan (3) Pelabelan total.