BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema yang merupakan acuan untuk memudahkan dalam memahami pembahasan pada bab selanjutnya. Teorema-teorema yang disajikan dalam bab ini bersumber dari berbagai buku teks yang terkait dengan persamaan diferensial, teori sistem matematika, sistem dinamik dan model matematika. Oleh karena itu, teorema-teorema yang disajikan dalam bab ini tidak disertai dengan buktinya. Bukti teorema-teorema yang disajikan dapat dirujuk pada acuan daftar pustaka yang dicantumkan.

2.1 Covid-19

Coronavirus (CoV) adalah keluarga besar virus yang menyebabkan penyakit mulai dari gejala ringan sampai berat. Ada setidaknya dua jenis coronavirus yang diketahui menyebabkan penyakit yang dapat menimbulkan gejala berat seperti *Middle East Respiratory Syndrome (MERS)* dan *Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS)*. Coronavirus Disease (COVID-19) adalah virus jenis baru yang belum pernah diidentifikasi sebelumnya pada manusia. Virus corona adalah zoonosis (ditularkan antara hewan dan manusia). Penelitian menyebutkan bahwa SARS ditransmisikan dari kucing luwak (*civet cats*) ke manusia dan MARS dari unta ke manusia. Beberapa coronavirus yang dikenal beredar pada hewan belum terbukti menginfeksi manusia.

2.1.2 Gejala Orang Yang Terinfeksi Covid-19

Manifestasi klinis biasanya muncul dalam 2 hari hingga 14 hari setelah paparan. Tanda gejala umum infeksi coronavirus antara lain gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, dan sesak napas. Pada kasus yang berat dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, dan bahkan kematian. Gejala bagi orang yang terinfeksi covid-19 dapat dilihat dari beberapa kategori sebagai berikut:

a. Pasien dalam Pengawasan

1. Seseorang yang mengalami:
    a) Demam (≥ 38℃) atau ada riwayat demam,
    b) Batuk/ Pilek/ Nyeri tenggorokkan,
    c) Pneumonia ringan hingga berat berdasarkan gejala klinis dan atau gambaran radiologis.

    Perlu waspada pada pasein dengan gangguan sistem kekebalan tubuh (*immunocompromised*) karena gejala dan tanda menjadi tidak jelas. Dan memiliki riwayat perjalanan ke negara terjangkit pada 14 hari terakhir sebelum timbul gejala.

2. Seseorang dengan demam (≥ 38℃) atau ada riwayat ISPA ringan sampai berat dan pada 14 hari terakhir sebelum timbul gejala, memiliki salah satu dari paparan berikut:
    a) Riwayat kontak dengan kasus konfirmasi Covid-19; atau
    b) Bekerja atau mengunjungi fasilitas kesehatan yang berhubungan dengan pasein konfirmasi Covid-19; atau
    c) Riwayat perjalanan ke Provinsi Hubei, China (termasuk Kota Wuhan); atau
    d) Kontak dengan orang yang memiliki riwayat perjalanan 14 hari ke Provinsi Hubei, China (termasuk Kota Wuhan).

b. Orang dalam Pemantauan

Seseorang yang mengalami gejala demam (≥ 38℃) atau ada riwayat demam atau ISPA tanpa pneumonia dan memiliki riwayat perjalanan ke negara yang terjangkit pada 14 hari terakhir sebelum timbul gejala.

2.1.3 Pencegahan Covid-19

Pencegahan yang dapat dilakukan antara lain :

a) Health Advice :

1. Melakukan kebersihan tangan rutin, terutama sebelum memegang mulut, hidung, dan mata; serta setelah memegang instalasi publik.
2. Mencuci tangan dengan air dan sabun serta bilas setidaknya 20 detik. Cuci dengan air dan keringkan dengan handuk atau kertas sekali pakai. Jika tidak ada fasilitas cuci tangan, dapat menggunakan alkohol 70-80% handrub.
3. Menutup mulut dan hidung ketika bersin atau batuk menggunakan tisu, atau sisi dalam lengan atas. Tisu yang digunakan dibuang ke tempat sampah dan cuci tangan setelahnya.
4. Ketika memiliki gejala saluran napas, gunakan masker dan berobat ke fasilitas kesehatan.

b) *Travel Advice*

1. Hindari kontak dengan hewan (baik hidup maupun mati)
2. Hindari mengkonsumsi produk hewan mentah atau setengah matang
3. Hindari mengunjungi pasar basar, peternakan, atau pasar hewan.
4. Hindari kontak dekat dengan pasein yang memiliki gejala infeksi saluran napas.
5. Patuhi petunjuk keamanan dan aturan kebersihan.
6. Jika merasa kesehatan tidak nyaman ketika di daerah outbreak terutama demam atau batuk, gunakan masker dan cari layanan kesehatan.
7. Setelah kembali dari daerah outbreak, konsultasi ke dokter jika terdapat gejala demam atau gejala lain dan beritahu dokter riwayat perjalanan serta gunakan masker untuk mencegah penularan penyakit.

2.1.4 Istilah-istilah dalam Covid-19

a. Kasus Probabel

Pasien dalam pengawasan yang diperiksa untuk Covid-19 tetapi inkonklusif (tidak dapat disimpulkan) atau Orang yang diyakini sebagai suspek dengan ISPA berat atau gagal napas atau meninggal dengan gambaran klinis Covid-19 dan hasil laboratorium RT-PCR belum keluar.

b. Kasus Konfirmasi

Seseorang yang dinyatakan positif terinfeksi virus Covid-19 yang dibuktikan dengan pemeriksaan laboratorium RT-PCR. Kasus konfirmasi dibagi menjadi 2, yakni kasus konfirmasi dengan gejala (simptomatik), dan kasus konfirmasi tanpa gejala (asimptomatik).

c. Kontak Erat

Orang yang memiliki riwayat kontak dengan kasus probable atau konfirmasi Covid-19.

d. Kasus Suspectible

Orang dengan gejala ISPA atau Covid-19 dan pada 14 hari terakhir memiliki riwayat perjalanan, tinggal di negara/wilayah yang melaporkan transmisi lokal atau riwayat kontak dengan kasus konfirmasi/probable Covid-19.

2.2 Himpunan

Definisi 2.1 (Rosen dkk, 2000)

Himpunan adalah kumpulan objek – objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Objek dalam himpunan disebut anggota, elemen atau unsur himpunan. Misalkan A suatu himpunan, notasi $x \in A$ berarti bahwa objek x adalah anggota himpunan A. Notasi $x \notin A$ berarti x bukan anggota himpunan A.

Anggota-anggota himpunan juga dituliskan di antara kurung kurawal dan dipisahkan dengan tanda koma atau dapat dinotasikan dengan $\{$x $\mid$ syarat yang harus dipenuhi $x\}$. Suatu himpunan pada umumnya dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C dan seterusnya. Beberapa himpunan bilangan dengan simbol-simbol baku, diantaranya :

1. $\mathbb{N} =$ himpunan bilangan asli $= \{1, 2, 3, \cdots\}$
2. $\mathbb{Z} =$ himpunan bilangan bulat $= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
3. $\mathbb{Q} =$ himpunan bilangan rasional $= \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$
4. $\mathbb{R} =$ himpunan bilangan real, yaitu yang anggota-anggotanya merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dituliskan bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$ seperti $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ dan seterusnya. Sedangkan bilangan irrasional tidak dapat dibentuk dalam suatu hasil bagi dari dua buah bilangan bulat, seperti $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ dan sebagainya. Bilangan real mencakup bilangan positif, negatif, pecahan, desimal dan nol.

Ada beberapa macam himpunan, diantaranya himpunan kosong dan himpunan bagian. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen atau anggota, sedangkan himpunan kosong dilambangkan sebagai $\{\ \ \}$ atau $\emptyset$. Sedangkan himpunan bagian (*subset*) adalah setiap elemen dari himpunan H juga merupakan elemen dari himpunan G atau dinotasikan sebagai $H \subset G$.

Adapun juga beberapa operasi terhadap himpunan, diantaranya irisan dan selisih. Irisan dari himpunan H dan himpunan G adalah himpunan semua elemen yang berada di himpunan H dan juga berada di himpunan G

atau dinotasikan sebagai $H \cap G$. Sedangkan selisih dari himpunan H dan himpunan G adalah himpunan dari elemen-elemen yang termasuk himpunan tetapi tidak termasuk di himpunan atau dinotasikan sebagai $H - G$ (Rosen dkk, 2012).

2.3 Matriks dan Nilai Eigen Matriks

Definisi 2.2 (Anton dan Rorres, 2004)

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Jika A adalah sebuah matriks, maka akan menggunakan a_{ij} untuk menyatakan entri yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A.

Sebuah matriks A berukuran $m \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan $m, n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.3 (Anton dan Rorres, 2004)

Dua matriks dikatakan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan entri-entrinya yang berpadanan sama. Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ atau secara ekuivalen, $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Berikut ini dijelaskan beberapa jenis matriks yang digunakan pada pembahasan.

1. Matriks Bujur sangkar

   Definisi 2.4 (Anton dan Rorres, 2004)

   Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujursangkar berordo n dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama dari A. Secara umum matriks A berukuran $n \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Matriks Identitas

   Definisi 2.5 (Anton dan Rorres, 2004)

   Matriks identitas adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya dan dinyatakan dengan I.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Jika ukurannya penting maka dapat ditulis sebagai I_n untuk matriks identitas $n \times n$. Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka $AI_n = A$ dan $I_m A = A$.

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004)

Jika A adalah matriks bujursangkar, maka minor entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut kofaktor entri a_{ij}.

Teorema 2.1 (Anton dan Rorres, 2004)

Determinan dari matriks $A_{n\times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

atau

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Contoh 2.1

Tentukan determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Determinan matriks A dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama dari A diperoleh

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1(-24 + 28) - 2(-8 - 7) + 2(4 + 3) \\ &= -4 + 30 - 14 \\ &= 12\end{aligned}$$

Definisi 2.7 (Roman, 2008)

Suatu skalar λ yang memenuhi persamaan

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

dengan A matriks konstan yang berukuran $n \times n$ dan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor tak nol, λ disebut nilai eigen dari A. Kemudian $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor tak nol pada Persamaan (2.1) disebut vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ digunakan Persamaan (2.1) yang ekuivalen dengan

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Contoh 2.2

Tentukan nilai eigen untuk matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &(1-\lambda)\big((-5-\lambda)(4-\lambda) - (3-(6)\big) + 3(3(4-\lambda) \\ &- 3(6) + 3\big(3(-6)(-5-\lambda)(6)\big) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(-2+\lambda+\lambda^2) + 3(-6-3\lambda) + (12+6\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda - 9\lambda + 18\lambda + 2\lambda - 2 - 18 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$$

sehingga diperoleh $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$, yang merupakan nilai eigen dari matriks A.

2.4 Fungsi dan Limit

Definisi 2.8 (Varberg dkk, 2007)

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal (*domain*), dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (*range*) fungsi.

Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Maka $f(x)$ yang dibaca "f dari x" atau "f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Jika aturan untuk suatu fungsi diberikan oleh sebuah persamaan berbentuk $y = f(x)$, x disebut variabel (peubah) bebas dan y disebut variabel tak bebas (Varberg dkk, 2007).

Definisi 2.9 (Varberg dkk, 2007)

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L.

2.5 Turunan Parsial

Definisi 2.10 (Purcell, dkk, 2010)

Misalkan f adalah fungsi dengan dua variabel x dan y. Jika y konstan, misalnya $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ adalah fungsi dengan variabel tunggal x. Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di $f_x(x_0, y_0)$ dengan

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang serupa, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan dengan $f_y(x_0, y_0)$ dan dirumuskan dengan

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}$$

Jika $z = f(x, y)$, maka penulisan notasi untuk turunan parsial adalah sebagai berikut:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

Simbol ∂ merupakan notasi turunan parsial.

Teorema 2.2 (Perko, 2001)

Jika $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferensiabel di $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka turunan parsial f_i terhadap x_j ada di $\boldsymbol{x_0}$ dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$Df(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})x_j$$

dengan $i, j = 1,2, \dots, n$ dan

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right]^T$$

Pada Teorema 2.2, diketahui bahwa jika fungsi $\boldsymbol{f}$ diferensiabel, maka $D\boldsymbol{f}$ dapat dituliskan dalam bentuk matriks berukuran $n \times n$, yaitu

$$D\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3

Diberikan $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ dengan

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 8 \\ x_2^2 + 8 \end{bmatrix}$$

Tentukan turunan dari fungsi $\boldsymbol{f}$.

Penyelesaian :

Turunan dari fungsi $\boldsymbol{f}$ tersebut adalah

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

2.6 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang berisi nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tidak diketahui (Waluya, 2006). Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa (PDB) jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu peubah bebas. Contoh persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{2.1}$$

Persamaan ini melibatkan fungsi y yang tidak diketahui dan terdiri dari peubah bebas x (Bronson dan Costa, 2007).

Suatu Persamaan diferensial dapat dikelompokkan berdasarkan orde dan derajat. Orde suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunannya, sedangkan derajat menyatakan pangkat tertinggi dari persamaan diferensial.

2.7 Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang di dalamnya memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$. Adapun bentuk umum dari sistem persamaan diferensial orde satu diberikan oleh definisi berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $f_i: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$, $i = 1,2, \dots, n$, dan $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in E$. Kemudian diberikan syarat awal $x_i(t_0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, n.$
Persamaan-persamaan dalam (2.5) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$, $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x_1}, \dot{x_2}, \cdots \dot{x_n})^T$, dan syarat awal $\boldsymbol{x}(t_o) = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) = \boldsymbol{x_0}$.

Sistem (2.3) disebut sistem persamaan diferensial $autonomous$ karena variabel untuk waktu t tidak muncul secara eksplisit. Selanjutnya jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ masing-masing linear dalam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ maka persamaan-persamaan dalam (2.2) disebut sistem persamaan diferensial linear, jika tidak maka persamaan-persamaan dalam (2.2) disebut sistem persamaan diferensial non linear. Persamaan-persamaan dalam (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\\ &\vdots\\ \dot{x_n} &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\end{aligned} \tag{2.4}$$

Persamaan-persamaan dalam (2.4) dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} \tag{2.5}$$

2.8 Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Titik ekuilibrium dibedakan menjadi dua yaitu titik ekuilibrium non endemik dan titik ekuilibrium endemik.

Berikut ini akan didefinisikan mengenai titik ekuilibrium dari Sistem (2.3).

Definisi 2.10 (Olsder, 1994)

Titik $\overline{\boldsymbol{x}} \in E \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.3) jika $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$.

Contoh 2.4

Tentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu S\\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I\end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan

S : *Susceptible* adalah individu-individu sub-populasi yang rentan terkena penyakit.

I : *Infected* adalah individu-individu sub-populasi yang terjangkit penyakit.

μ : laju kematian alami.

Λ :laju *recruitment*.

β : laju penularan penyakit dari sub-populasi *I* ke sub-populasi *S*.

Penyelesaian :

Titik Ekuilibrium non endemik diperoleh dengan menggunakan Sistem Persamaan (2.6) dengan syarat $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, sehingga Sitem Persamaan (2.6) menjadi

$$\Lambda - \beta SI - \mu S = 0 \tag{2.7}$$

$$\beta SI - \mu I = 0 \tag{2.8}$$

Titik ekuilibrium non endemik di notasikan dengan $E_1 = (S^*, I^*)$, dan diselesaikan sebagai berikut :
Berdasarkan Persamaan (2.8), diperoleh :

$$(\beta S - \mu)I = 0$$
$$I = 0, \text{ sebagai } I^*$$

Kemudian, subtitusikan $I = 0$ ke Persamaan (2.7), diperoleh :

$$\begin{aligned} \Lambda - \mu S &= 0 \\ S &= \frac{\Lambda}{\mu}, \text{ sebagai } S^* \end{aligned}$$

Jadi, titik ekuilibrium non endemik adalah $E_1 = (S^*, I^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, \right)$.

Titik ekuilibrium endemik di notasikan dengan $E_2 = (S^{**}, I^{**})$, diselesaikan sebagai berikut :
Berdasarkan Persamaan (2.8), diperoleh :

$$\begin{aligned} (\beta S - \mu)I &= 0 \\ \beta S - \mu &= 0 \\ \beta S &= \mu \\ S &= \frac{\mu}{\beta}, \text{ sebagai } S^{**} \end{aligned}$$

Kemudian, subtitusikan $S = \frac{\mu}{\beta}$ ke Persamaan (2.7), diperoleh :

$$\begin{aligned} \beta SI &= \Lambda - \mu S \\ I &= \frac{\Lambda - \mu S}{\beta} \\ &= \frac{\Lambda - \mu\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{\beta\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \\ &= \frac{\beta\Lambda - \mu^2}{\mu\beta}, \text{ sebagai } I^{**} \end{aligned}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik adalah $E_2 = (S^{**}, I^{**}) = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{\beta\Lambda - \mu^2}{\mu\beta}\right)$

Definisi 2.11 (Perko, 2001)

Diberikan fungsi $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Matriks Jacobian dari fungsi $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x_0}$, ditulis $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ dan didefinisikan sebagai

$$Jf(\boldsymbol{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari sifat kestabilan suatu titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dapat ditinjau berdasarkan teorema berikut.

Teorema 2.3 (Olsder, 1994)
Diberikan Sistem (2.5) dengan A suatu matriks berukuran $n \times n$ yang memiliki nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

(i) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika semua nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif ($Re(\lambda_i) < 0$, untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,n$).
(ii) Jika terdapat λ_i untuk $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ dengan $Re(\lambda_i) > 0$, maka titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan tidak stabil.
(iii) Jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$ dan nilai eigen λ_i untuk $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ dengan $Re(\lambda_i) = 0$ yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen bebas linear sebanyak multiplisitas λ_i, maka titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan stabil lokal.

Teorema 2.4 (Olsder dan Woude, 1994)
Diberikan Matriks Jacobian $\boldsymbol{Jf}(\bar{\boldsymbol{x}})$ berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ dari sistem non linear

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \boldsymbol{\lambda_3}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$.

(i) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks $J\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$ memiliki bagian real negatif ($Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1,2,3, \ldots n$).
(ii) Jika terdapat λ_i untuk $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ dengan $Re(\lambda_i) > 0$, maka titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan tidak stabil.

2.9 Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Bilangan reproduksi dasar adalah jumlah rata-rata infeksi yang terjadi saat suatu individu yang terinfeksi masuk kedalam populasi rentan selama periode terinfeksi. Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah *Basic Reproduction Number* (R_0). *Basic Reproduction Number* didefinisikan sebagai bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut :

a. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan berkurang atau menghilang dalam populasi.
b. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
c. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat mejadi wabah dalam populasi.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mementukan R_0 yaitu dengan menggunakan *next generatiom matriks* atau matriks generasi mendatang merupakan sebuah teknik penentuan nilai R_0 yang pertama kali dikenalkan oleh Diekmann dkk pada tahun 1990. R_0 didefinisiskan sebagai radius spektral dari *next generation matriks*.

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, Y, Z) \tag{2.9}$$

$$\frac{dY}{dt} = g(X, Y, Z) \tag{2.10}$$

$$\frac{dZ}{dt} = h(X, Y, Z) \tag{2.11}$$

dengan $X \in \mathbb{R}^r, Y \in \mathbb{R}^s, Z \in \mathbb{R}^n, r, s, n \geq 0$ dan $h(X^*, 0,0) = 0$. Komponen X memuat kelas individu yang sehat atau yang sembuh, komponen Y memuat kelas individu yang terinfeksi dan Z memuat kelas individu yang terinfeksi serta dapat menularkan penyakit.

Penentuan nilai R_0 dilakukan dengan cara mencari *next generation matrix* yang melibatkan radius spektral dari Sistem Persamaan (2.9)-(2.11) melalui langkah-langkah sebagai berikut

1. Misalkan $E_0 = (X^*, 0,0) \in \mathbb{R}^{r+s+n}$ adalah titik *equilibrium* endemik dari sistem (2.6)-(2.8) yang memenuhi

$$f(X^*, 0,0) = 0$$

$$g(X^*, 0,0) = 0$$

$$h(X^*, 0,0) = 0$$

2. Asumsikan $g(X^*, Y, Z) = 0$ yang secara implisit menentukan fungsi

$$Y = \tilde{g}(X^*, Z) \tag{2.12}$$

3. Substitusi Persamaan (2.9) dan titik *equilibrium* non endemik ke Persamaan (2.8) diperoleh

$$\frac{dZ}{dt} = h(X^*, \tilde{g}(X^*, Z)Z) \tag{2.13}$$

4. Turunkan Persamaan (2.10) terhadap variabel Z dan kemudian dievaluasi di $Z = 0$, diperoleh

$$\left.\frac{Dh(X^*, \tilde{g}(X^*, Z)Z)}{dZ}\right|_{Z=0} \tag{2.14}$$

5. Misalkan

$$A = \left.\frac{Dh(X^*, \tilde{g}(X^*, Z)Z)}{dZ}\right|_{Z=0}$$

Asumsikan matriks A dapat ditulis dalam bentuk $A = M - D$, dengan M adalah matriks yang semua entrinya merupakan bilangan real tak negatif dan suatu matriks diagonal. Dari matriks M dan D diperoleh *the next generation matrix* dari Sistem (2.6)-(2.8) diperoleh dari perkalian matriks M dan matriks D^{-1} dengan matriks M diartikan sebagai rata-rata infeksi per satuan waktu dan D^{-1} Merupakan periode infeksi.

6. Misalkan $m(A) = \sup\{Re(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$ didefinisikan sebagai batas spektral dari matriks A dengan $Re(\lambda)$ merupakan bagian real dari nilai eigen λ. Misalkan pula $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ yang didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks A, maka

$$m(A) < 0 \Leftrightarrow \rho(MD^{-1}) < 1$$

atau

$$m(A) > 0 \Leftrightarrow \rho(MD^{-1}) > 1$$

7. Karena bilangan reproduksi dasar (R_0) dinyatakan sebagai radius spektral dari matriks MD^{-1} maka diperoleh

$$R_0 = \rho(MD^{-1})$$

dengan MD^{-1} disebut *next generation matrix*. Dimana M dan D, merupakan matriks berukuran $n \times n$.

Definisi 2.12 *Supremum* (Subhan, 2017)

Bilangan s adalah supremum dari subhimpunan takkosong terbatas di atas H atau dapat dituliskan $s = \sup H$, jika

1. Untuk setiap $x \in H, x \leq s$ (s batas atas H)
2. Untuk setiap a batas atas $H, \geq s$ (s batas atas terkecil)

2.10 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan suatu metode numerik yang digunakan untuk mencari solusi dari suatu persamaan diferensial. Metode ini memiliki ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode-metode yang lain, seperti Metode Euler, Metode Heun dan Metode Deret Taylor. Berikut ini perhitungan menggunakan bentuk dari metode Rungge-Kutta orde empat (Bronson dan Costa, 2007).

$$y_{n+1} = y_n + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right], \tag{2.15}$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{2.16}$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \tag{2.17}$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \tag{2.18}$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \tag{2.19}$$

dimana h adalah ukuran tahapan.

Contoh 2.6

Gunakan metode Runge-Kutta orde keempat untuk menyelesaikan

$$f(x,y) = \frac{dx}{dy} = y; \qquad y(0) = 1$$

pada interval [0, 1] dengan h = 0,2.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Persamaan (2.15) - (2.19), diperoleh:

1. Untuk n = 0

$x_0 = 0, y_0 = 1$

$k_1 = hf(x_0\,; y_0)$

$\quad = hf(0\,; 1)$

$\quad = (0{,}2)[1 + 0]$

$= (0{,}2)[1]$

$= 0{,}2$

$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h\,;\ y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$

$= hf(0 + \frac{1}{2}(0{,}2)\,; 1 + \frac{1}{2}(0{,}2))$

$= hf(0{,}1\,; 1{,}1)$

$= (0{,}2)[1{,}1 + 0{,}1]$

$= (0{,}2)[1{,}2]$

$= 0{,}24$

$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h\,;\ y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$

$= hf\left(0 + \frac{1}{2}(0{,}2)\,;\ 1 + \frac{1}{2}(0{,}24)\right)$

$= hf(0{,}1\,; 1{,}12)$

$= (0{,}2)[1{,}12 + 0{,}1]$

$= (0{,}2)[1{,}22]$

$= 0{,}244$

$k_4 = hf(x_0 + h\,;\ y_0 + k_3)$

$= hf(0 + 0{,}2\,;\ 1 + 0{,}244)$

$= hf(0{,}2\,;\ 1{,}244)$

$= (0{,}2)[1{,}244 + 0{,}2]$

$= (0{,}2)[1{,}444] = 0{,}2888$

Sehingga diperoleh

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{6}(0{,}2 + 2(0{,}24) + 2(0{,}244) + 0{,}2888)\right]$$

$$= 1 + 0{,}2428$$

$$= 1{,}2428$$

2. Untuk *n* = 1

$x_1 = 0{,}2\,;\ y_1 = 1{,}2428$

$k_1 = hf(x_1\,; y_1)$

$= hf(0{,}2\,;\ 1{,}2428)$

$= (0{,}2)[1{,}2428 + 0{,}2]$

$= (0,2)[1,4428]$

$= 0,28856$

$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{1}{2}h\ ;\ y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)$

$= hf((0,2) + \frac{1}{2}(0,2)\ ; (1,2428) + \frac{1}{2}(0,28856))$

$= hf(0,3\ ; 1,38708)$

$= (0,2)[1,38708 + 0,3]$

$= (0,2)[1,68708]$

$= 0,33742$

$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{1}{2}h\ ;\ y_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$

$= hf\left(0,2\ + \frac{1}{2}(0,2)\ ;\ 1,2428 + \frac{1}{2}(0,33742)\right)$

$= hf(0,3; 1,41151)$

$= (0,2)[1,41151 + 0,3]$

$= (0,2)[1,71151]$

$= 0,3423$

$k_4 = hf(x_1 + h\ ;\ y_1 + k_3)$

$= hf(0,2 + 0,2\ ;\ 1,2428 + 0,3423)$

$= hf(0,4\ ;\ 1,5851)$

$= (0,2)[1,5851 + 0,4]$

$= (0,2)[1,9851]\ = 0,397$

Sehingga diperoleh

$y_2 = y_1 + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$

$= 1,2428 + \left[\frac{1}{6}((0,28856) + 2(0,33742) + 2(0,3423) + 0,397)\right]$

$= 1,2428 + 1,8045$

$= 3,0473$

3. Untuk $n = 2$

$x_2 = 0,4\ ;\ y_2 = 3,0473$

$k_1 = hf(x_2\ ; y_2)$

$= hf(0,4\ ;\ 3,0473)$

$= (0,2)[3,0473 + 0,4\ ]$

$= (0,2)[3,4473]$

$= 0,6895$

$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h\,;\ y_2 + \frac{1}{2}k_1\right)$

$= hf((0,4\ ) + \frac{1}{2}(0,2)\ ; (3,0473) + \frac{1}{2}(0,6895))$

$= hf(0,8\ ; 3,3921)$

$= (0,2)[3,3921 + 0,8]$

$= (0,2)[4,1921]$

$= 0,83842$

$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h\,;\ y_2 + \frac{1}{2}k_2\right)$

$= hf\left((0,4)\ + \frac{1}{2}(0,2)\ ;\ 3,0473 + \frac{1}{2}(0,83842)\right)$

$= hf(0,8\ ; 3,46651)$

$= (0,2)[3,46651 + 0,8]$

$= (0,2)[4,26651]$

$= 0,8533$

$k_4 = hf(x_2 + h\ ;\ y_2 + k_3)$

$= hf(0,4 + 0,2\ ;\ 3,0473 + 0,8533)$

$= hf(0,6\ ;\ 3,9006)$

$= (0,2)[3,9006 + 0,6]$

$= (0,2)[4,5006]\ = 0,9$

Sehingga diperoleh

$y_3 = y_2 + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$

$= 3,0473 + \left[\frac{1}{6}((0,6895) + 2(0,83842) + 2(0,8533) + 0,9)\right]$

$= 3,0473 + 4,3984$

$= 7,4457$

4. Untuk *n* = 3

$x_3 = 0,6\ ;\ y_3 = 7,4457$

$k_1 = hf(x_3\ ; y_3)$

$= hf(0,6\ ;\ 7,4457)$

$= (0,2)[7,4457 + 0,6\ ]$

$= (0,2)[8,0457]$

$= 1,60914$

$k_2 = hf\left(x_3 + \frac{1}{2}h\,;\; y_3 + \frac{1}{2}k_1\right)$

$= hf((0,6\,) + \frac{1}{2}(0,2)\,; (7,4457) + \frac{1}{2}(1,60914))$

$= hf(0,7\,; 8,25)$

$= (0,2)[8,25 + 0,7\,]$

$= (0,2)[8,95]$

$= 1,79$

$k_3 = hf\left(x_3 + \frac{1}{2}h\,;\; y_3 + \frac{1}{2}k_2\right)$

$= hf\left((0,6)\; + \frac{1}{2}(0,2)\,;\; (7,4457) + \frac{1}{2}(1,79)\right)$

$= hf(0,7\,; 8,3407)$

$= (0,2)[8,3407 + 0,7]$

$= (0,2)[9,0407]$

$= 1,8081$

$k_4 = hf(x_3 + h\,;\; y_3 + k_3)$

$= hf(0,6 + 0,2\,;\; 7,4457 + 1,8081)$

$= hf(0,8\,;\; 9,2538)$

$= (0,2)[9,2538 + 0,8]$

$= (0,2)[10,0538]\; = 2,011$

Sehingga diperoleh

$y_4 = y_3 + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]$

$= 7,4457 + \left[\frac{1}{6}((1,60914) + 2(1,79) + 2(1,8081) + 2,011)\right]$

$= 7,4457 + 9,4754$

$= 16,9211$

Penyelesaian $\frac{dx}{dy} = y\;\;;\;\; y(0) = 1$

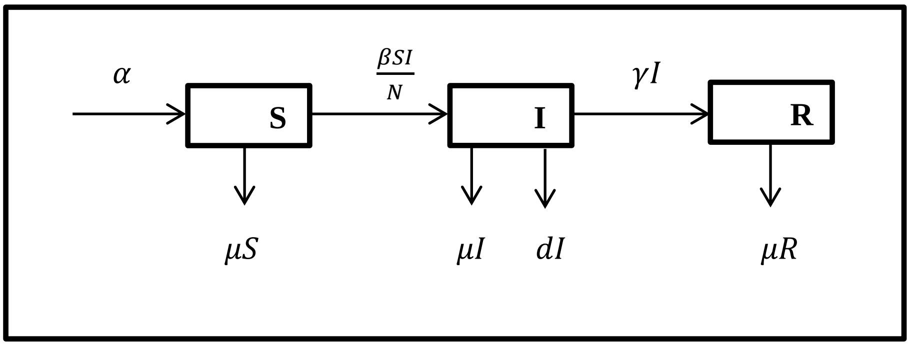
Tabel contoh 2.6 Interval [0, 1]

h = 0,2	
x_n	y_n
0,0	**1**
0,2	**1,2428**
0,4	**3,0473**
0,6	**7,4457**
0,8	**16,9211**

2.11 Model Epidemik SIR

Model epidemik *SIR* pertama kali dikenalkan oleh Kermack dan Mc. Kendrick pada Tahun 1972 dalam buku "*A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics". *Pada model epidemik *SIR*, populasi dibagi menjadi tiga kelas yaitu *Susceptible* (*S*), *Infected* (*I*) dan *Recovered* (*R*) (Iswanto, 2012).

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dalam diagram yang dikaji oleh Fredlina dkk. (2012)



Gambar 2.1 Diagram skematik model *SIR*

Parameter-parameter yang digunakan pada Gambar 2.1 adalah sebagai berikut:

1. α = laju kelahiran
2. β = laju penularan penyakit dari kelas *S* menjadi kelas *I*
3. γ = laju kesembuhan

4. μ = laju kematian alami pada setiap kelas

5. d = laju kematian karena sakit

Semua parameter bernilai positif

Pada Gambar 2.1 mengilustrasikan bahwa jumlah individu pada kelas S akan bertambah karena kelahiran sebesar α, dengan α konstan. Kelas S akan berkurang karena penularan penyakit sebesar $\frac{\beta SI}{N}$ dan kematian alami sebesar dI.

Jumlah individu yang terinfeksi pada kelas I akan bertambah karena adanya individu yang masuk dari kelas S sebesar $\frac{\beta SI}{N}$. Kelas I akan berkurang karena adanya individu yang sembuh sebesar γI. Selain itu kelas I juga akan berkurang karena adanya kematian alami sebesar μI dan kematian karena sakit sebesar dI.

Individu dalam kelas R diasumsikan tidak akan kambuh kembali menjadi penderita. Berkurangnya populasi ini disebabkan oleh kematian sebesar μR

Maka model matematika yang dikaji oleh Fredlina dkk. (2012) adalah

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + d + \gamma)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

dengan

$$N = S + I + R.$$

$\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}$ menyatakan laju perubahan jumlah individu pada tiap kelas per satuan waktu t.

2.12 Kestabilan Routh-Hurwitz (Wahab dan Subiantoro, 2008)

Nilai eigen dari A adalah akar polinomial karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Untuk mengetahui apakah suatu sistem stabil atau tidak stabil asimtotik dapat diselidiki dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Prosedur dan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut:

1. Menuliskan polinomial dalam λ sesuai dengan bentuk berikut

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

   Dengan $a_0 > 0$ dan a_i adalah konstanta, $i = 1,2, \dots, n$
2. Jika terdapat koefisien dari polinomial bernilai nol atau negatif, maka polinomal memiliki setidaknya satu akar dengan bagian dengan bagian real bernilai positif, sehingga akar-akar polinomial tersebut tidak stabil.
3. Bila semua koefisien polinomial positif, dapat dibentuk seperti pada Tabel 2.2 sebagai berikut.

Tabel 2.2 Kestabilan Routh-Hurwitz

Variabel	Koefisien
$\boldsymbol{\lambda^n}$	a_0 a_2 a_4 a_6 …
$\boldsymbol{\lambda^{n-1}}$	a_1 a_3 a_5 a_7 …
$\boldsymbol{\lambda^{n-2}}$	b_1 b_2 b_3 b_4 …
$\boldsymbol{\lambda^{n-3}}$	c_1 c_2 c_3 c_4 …
$\boldsymbol{\lambda^{n-4}}$	d_1 d_2 d_3 d_4 …
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
$\boldsymbol{\lambda^2}$	e_1 e_2
$\boldsymbol{\lambda}$	f_1
$\boldsymbol{\lambda^0}$	g_1

Koefisien-koefisien b_1, b_2, b_3,... dihitung sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1};\ b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1};\ b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}; \dots$$

Perhitungan koefisien b_i dilanjutkan $b_i = 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots$. Pola yang sama digunakan dalam menghitung koefisien $c_i,\ d_i, e_i, \dots$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots$.

Jadi

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1};\ c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1};\ c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}; \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{d_1};\ d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{d_1};\ d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{d_1}; \dots$$

Proses ini diselesaikan sampai baris ke-*n*. Dalam membuat susunan tersebut, suatu baris dapat dibagi atau dikalikan dengan suatu bilangan positif untuk menyederhanakan perhitungan numerik berikutnya tanpa mengubah kesimpulan kestabilan. Perlu diperhatikan bahwa nilai dari suku-suku pada kolom pertama tidak perlu diketahui, hanya diperlukan, hanya diperlukan tandanya saja.

4. Banyaknya akar yang tidak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama Tabel Routh-Hurwitz.
5. Syarat perlu dan cukup untuk akar-akar polinomial dikatakan stabil, adalah:
   a. Semua koefisien polinomial bertanda positif
   b. Semua kolom pertama dari Tabel Routh-Hurwitz bertanda positif.